Problemes

Altra vegada, els atents, amables i competents lectors d'aquesta secció ens han enviat solucions a *tots* els problemes proposats al número anterior. Sembla, però, que la resolució del problema **A76**, proposat en el número 23 del *SCM/Notícies* encara es resisteix!

L'Arnau Messegué, estudiant a la FME, UPC, s'estrena aquí amb una bellíssima resolució del problema **A81**. J. Monterde, des de València, el mateix Arnau Messegué i Xavi Ros, també estudiant a la FME, ens han enviat solucions al problema **A82**. En Xavi Ros és l'autor de la solució de l'**A83** i Miquel Amengual Covas, des de Cala Figuera, Mallorca, ens ofereix la seva solució del problema **A84** tot afegint-hi una interessant i documentada *coda*. No cal dir que és un goig constatar la convivència de novells molt novells i veterans força veterans en aquesta secció.

El nostre agraïment a Joaquim Nadal Vidal, de Cassà de la Selva, pel plantejament del bonic problema **A85**, que és d'aquells que sembla que no puguin ser, a Enric Ventura, per l'enunciat **A86** que demana generalització a dimensions superiors, a Xavi Ros Otón, per l'**A87** i a José Luis Díaz-Barrero per l'**A88**, que *no* és una de les seves endimoniades desigualtats. Moltes gràcies a tots!

Com sempre, us demanem que treballeu amb TEX o LaTEX, perquè això ens facilita moltíssim la feina de transcripció del vostre treball, tot i que aportacions en qualsevol altre format, inclosos els manuscrits, també seran ben rebudes. Les adreces de correu per enviar-nos-les són carles.romero.c@gmail.com, o bé, carles.romero.c@gmail.com. Fins aviat!

Problemes proposats

A85. (Proposat per Joaquim Nadal Vidal, IES de Cassà de la Selva.) Quatre cercles tenen diàmetres enters i el més gran d'aquests diàmetres és igual a la suma dels altres tres. Els tres cercles petits es poden posar sobre el gran de manera que cadascun dels cercles és tangent als altres tres i, en aquest cas, la part no coberta del cercle gran equival a l'àrea del cercle inscrit en un quadrat de $4830\,\mathrm{cm}^2$ d'àrea. Trobeu els diàmetres d'aquests quatre cercles.

A86. (Proposat per Enric Ventura, UPC, Manresa.) Considereu el conjunt de punts enters del pla, $\mathbb{Z}^2$, i la quadrícula de rectes horitzontals i verticals que els uneix. Trobeu una fórmula explícita que compti la quantitat total de camins que es poden seguir per l'esmentada xarxa, començant i acabant a l'origen, i en funció de la seva longitud n (s'enten per longitud d'un camí la quantitat de segments de llargada 1 que travessa, ja siguin horitzontals o verticals, i en qualsevol sentit; per exemple, "$\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \leftarrow, \rightarrow, \downarrow$" té longitud 6).

A87. (Proposat per Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.) Si A, B i C són els angles d'un triangle, proveu que

$$0 < \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2.$$

A88. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona..) Sigui $0 < \alpha < 1$ un nombre real amb $\dfrac{1}{1-\alpha} > k$, $1 \leq k \leq n$. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2\alpha^2 + n^2}{n^2} \right)^{\frac{k\alpha+n}{n^2}}.$$

Solucions

A81. (Proposat a la fase espanyola de la XLIV Olimpíada Matemàtica, València, 29 de març de 2008.) Hom assigna un color, d'entre c colors disponibles, a cadascun dels punts del pla. Vegeu si és que hi ha algun trapezi inscriptible en un cercle, de manera que els seus quatre vèrtexs tinguin el mateix color.

Solució: (Solució d'Arnau Messegué, estudiant, FME, UPC.) Provarem que la resposta és que sí. Primer, comencem veient que un trapezi inscriptible en un cercle és el mateix que un trapezi isòsceles:

En efecte, sigui $ABCD$ un trapezi, amb $AB \parallel CD$ inscrit en una circumferència de centre O, i siguin m i m' les respectives mediatrius d'AB i CD. Com que $ABCD$ és concíclic, $O \in m$ i $O \in m'$ i, d'altra banda, $AB \parallel CD$ implica que $m \parallel m'$. Ara bé, dues rectes paral·leles tenen un punt en comú si, i només si, són coincidents i, per tant, $m \equiv m'$. D'aquí, doncs, ja que A i B són simètrics respecte de m, així com ho són C i D, AC serà la recta simètrica de BD respecte de m i, en conseqüència, $AB = CD$, això és, $ABCD$ és un trapezi isòsceles.

A continuació, provarem que, si pintem el pla tal com ens indica l'enunciat, sempre podem trobar un trapezi isòsceles, és a dir, tal com hem vist, un trapezi inscriptible en una circumferència amb els quatre vèrtexs del mateix color:

Sigui O un punt qualsevol del pla, i C un conjunt infinit de $(c+1)-$àgons regulars homotètics per homotècies de centre O. En particular, considerarem que dos elements $A = A_1A_2 \ldots A_{c+1}$ i $B = B_1B_2 \ldots B_{c+1}$, de C, compleixen que A_i, B_i i O són en el mateix raig.

Observem que, pel *principi de colomar*, per cada $(c+1)-$àgon $A_1A_2 \ldots A_{c+1}$ de C, hi ha subíndexs i, j amb $i \neq j$ de manera que A_i i A_j són del mateix color. Ara, associem a cada element $M = M_1M_2 \ldots M_{c+1}$ de C una parella $P = ((i, j), k)$ en la qual k és el número corresponent al color que comparteixen M_i i M_j (en cas que hi hagués més d'una corda amb extrems d'igual color, n'escollim una arbitràriament). Tenint en compte, doncs, que cada polígon de C té $\binom{c+1}{2}$ cordes diferents, altra vegada pel *principi de colomar*, si escollim $\binom{c+1}{2} \cdot (c+1) + 1$ elements de C, almenys dos d'ells tindran la mateixa parella associada. Això implica que, en aquests dos polígons, siguin $X = X_1X_2 \ldots X_{c+1}$ i $Y = Y_1Y_2 \ldots Y_{c+1}$, hi ha una corda en el primer, X_iX_j, i una corda en el segon, Y_iY_j de manera que els punts extrems X_i, Y_i, X_j i Y_j són del mateix color. Però, com que per definició de C, els punts X_i, Y_i i O són en un mateix raig i X_j, Y_j i O també, podem deduir que $X_iX_j \parallel Y_iY_j$. A més, com que X i Y són polígons regulars homotètics de centre O, clarament $OX_i = OX_j$ i $OY_i = OY_j$ i, per tant, $X_iY_i = X_jY_j$ d'on concloem que $X_iX_jY_jY_i$ és un trapezi isòsceles.

Tal com volíem demostrar, hem trobat un trapezi isòsceles, $X_iX_jY_jY_i$ i, per tant, concíclic, que té els seus vèrtexs pintats del mateix color.

A82. (Proposat per la redacció.) Per a qualsevol nombre natural n definim

$$f(n) = 1! + 2! + 3! + \ldots + (n-1)! + n! = \sum_{i=1}^{n} n!\,.$$

Trobeu tots els valors de n pels quals $f(n)$ és un quadrat perfecte.

Solució: (Solució de J. Monterde. Dpt. de Geometria i Topologia. Facultat de Matemàtiques. Universitat de València.) La darrera xifra de qualsevol quadrat perfecte només pot ser una de les següents $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Ara bé, la darrera xifra de $f(n)$ per a $n \geq 4$ sempre és el 3. En efecte, $f(4) = 33$ i tots els sumands $i!$ amb $i \geq 5$ són divisibles per 2 i per 5 i, per tant, la darrera xifra de $i!$ amb $i \geq 5$ sempre és el 0.

Aleshores, només s'han d'estudiar els valors $f(n)$ per a $n = 1, 2, 3$. Un càlcul directe mostra que els únics quadrats perfectes són $f(1) = 1$ i $f(3) = 9$.

A83. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb costats a, b i c i medianes respectives m_a, m_b i m_c. Sigui $\triangle PQR$ el triangle que té per costats m_a, m_b i m_c. Sigui r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$ i sigui ρ el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle PQR$. Demostreu que

$$\rho \geq r\sqrt{3}\,.$$

En quines condicions hi ha igualtat?

Solució: (Solució de Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.) És ben conegut que el radi de la circumferència circumscrita a un triangle és el producte dels costats del triangle entre 4 vegades la seva àrea, i que el radi de la circumferència inscrita és l'àrea entre el semiperímetre. Per tant, si denotem $[XYZ]$ l'àrea del triangle $\triangle XYZ$, i p el semiperímetre de $\triangle ABC$, tenim que

$$\rho = \frac{m_a m_b m_c}{4[PQR]}$$

$$r = \frac{[ABC]}{p}\,.$$

Ara bé, pel problema **A80** sabem que $[PQR] = \frac{3}{4}[ABC]$ i, per tant,

$$\rho = \frac{m_a m_b m_c}{3[ABC]}\,.$$

Si denotem $S = [ABC]$, la desigualtat a demostrar és

$$\frac{m_a m_b m_c}{3S} \geq \frac{\sqrt{3}S}{p}$$

i, tot tenint em compte que $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$,

$$m_a m_b m_c \geq 3\sqrt{3}(p-a)(p-b)(p-c)\,.$$

Ara, és ben conegut que

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

(i cíclicament), i utilitzant que $b^2 + c^2 \geq 2bc$, tenim que

$$m_a \geq \frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2 - a^2} = \sqrt{p(p-a)}$$

i

$$\begin{aligned} m_a m_b m_c &\geq \sqrt{p(p-a)}\sqrt{p(p-b)}\sqrt{p(p-c)} = \\ &= \sqrt{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}\,. \end{aligned}$$

Finalment, aplicant la desigualtat entre les mitjanes aritmètica i geomètrica,

$$\begin{aligned} \frac{1}{27}p^3 &= \left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3 \\ &\geq (p-a)(p-b)(p-c) \end{aligned}$$

obtenim que

$$\begin{aligned} m_a m_b m_c &\geq \sqrt{p^3(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &\geq 3\sqrt{3}(p-a)(p-b)(p-c) \end{aligned}$$

i, per tant,

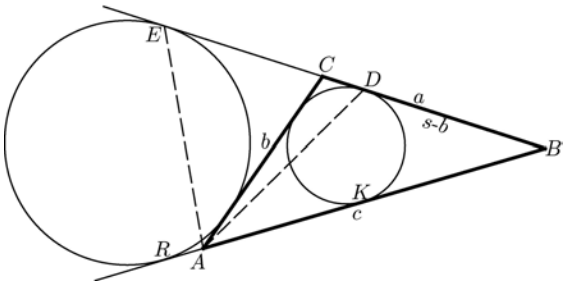
$$\rho \geq \sqrt{3}r$$

com volíem demostrar.

La igualtat es dóna si i només si el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.

A84. (D'una recopilació de problemes d'olimpíades iberoamericanes.) En un triangle $\triangle ABC$ el cercle inscrit és tangent al costat BC en el punt D i el cercle exinscrit oposat al vèrtex B és tangent al costat BC en el punt E. A més, $AD = AE$. Demostreu que $2C - B = 180°$.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) Siguin a, b i c els costats del triangle $\triangle ABC$ respectivament oposats als angles A, B i C. Designarem per s el semiperímetre del triangle.



El *Teorema dels Cosinus* aplicat al triangle $\triangle ABD$, en el qual $BD = s - b$, dóna

$$AD^2 = c^2 + (s-b)^2 - 2c(s-b)\cos B$$

i, aplicat al triangle$\triangle ABE$, en què $BE = s$,

$$AE^2 = c^2 + s^2 - 2cs\cos B\,.$$

Així, doncs,

$$\begin{aligned} AD^2 - AE^2 &= b(2c\cos B + b - 2s) = \\ &= b(2c\cos B - c - a) \end{aligned}$$

perquè $2s = a + b + c$. Aleshores, la condició $AD = AE$ és equivalent a $2c\cos B = c + a$, la qual equival a

$$2\sin C\cos B = \sin C + \sin A \qquad (1)$$

perquè $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. L'aplicació de la fórmula de la rest de sinus transforma (1) en

$$\sin(B+C) - \sin(B-C) = \sin C + \sin A$$

i, si tenim en compte ara que els sinus de dos angles suplementaris són iguals, obtenim que la condició (1) equival a la

$$-\sin(B-C) = \sin C$$

o sigui,

$$\sin C - \sin(B - C) = 0$$

i una nova aplicació de les fórmules de transformació de sumes en productes dóna

$$\sin \frac{B}{2} \cos \frac{2C - B}{2} = 0$$

que obliga a

$$\cos \frac{2C - B}{2} = 0\,,$$

és a dir,

$$\frac{2C - B}{2} = 90^\circ$$

i, finalment,

$$2C - B = 180^\circ$$

com es volia.

Coda:
En un triangle així, en el qual $2C - B = 180^\circ$ es compleix també que:

1) Si la bisectriu exterior de l'angle A talla BC en F i la circumferència inscrita és tangent al costat AB en K, aleshores,

$$CF = 2AK\,.$$

2) Si M és el punt mitjà del costat BC i, si la circumferència de centre A i radi AM talla BC en el punt N, aleshores,

$$MN = AB\,.$$

Aquests dos resultats foren proposats pel professor Toshio Seimiya, del Japó, a la revista *Crux Mathematicorum* com a problemes 2.303 (febrer 1998) i 2.316 (març 1998). Les respectives solucions es troben en els números de febrer i març del 1999.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

- Carlos Arturo Escudero Salcedo va llegir la seva tesi, dirigida per Agustí Reventós Tarrida, titulada *Conjuntos focales en variedades de Riemann de curvatura acotada*, el dia 20 de setembre de 2006. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Podem considerar que l'origen llunyà d'aquesta tesi és la desigualtat següent: si $C = \partial K$ és la vora d'un conjunt K compacte, convex d'àrea F de $\mathbb{R}^2$, llavors

$$\int_C \frac{1}{k} ds \geqslant 2F, \tag{1}$$

on $k = k(s)(> 0)$ és la funció de curvatura C i ds significa la mesura de la longitud de l'arc sobre C. La igualtat es dóna si i només si C és un cercle.

En aquesta tesi es dóna una prova nova, molt curta, de (1), que té l'avantatge de proporcionar una interpretació geomètrica de la diferència $2F - \int_C k^{-1} ds$. Concretament, es demostra que

$$\int_C \frac{1}{k} ds = 2(F - F_e), \tag{2}$$

on $F_e(\leq 0)$ és l'àrea (algebraica) del domini acotat per l'evoluta de C.

La desigualtat (1) és l'anàleg dos-dimensional de la desigualtat de Heintze i Karcher:

$$\int_S \frac{1}{H} dA \geqslant 3V,$$

on $H(> 0)$ és la curvatura mitjana d'una superfície S compacta, encaixada a $\mathbb{R}^3$, vora d'un domini D de volum V. És sabut que la igualtat es dóna si i només si S és una esfera.